绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学参考解答

一．选择题：每小题5分，满分45分．

（1）C （2）A （3）A （4）B （5）C

（6）D （7）D （8）B （9）D

二．填空题：每小题5分，满分30分．试题中包含两个空的，答对1个的给3分，全部答对的给5分．

（10）$3-2\mathrm{i}$ （11）10 （12）5

（13）$\dfrac{1}{6}$；$\dfrac{2}{3}$ （14）4 （15）$\dfrac{1}{6}$；$\dfrac{13}{2}$

三．解答题

（16）满分14分．

（Ⅰ）**解：** 在$\triangle ABC$中，由余弦定理及$a=2\sqrt{2}$，$b=5$，$c=\sqrt{13}$，有$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．又因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\dfrac{\pi}{4}$．

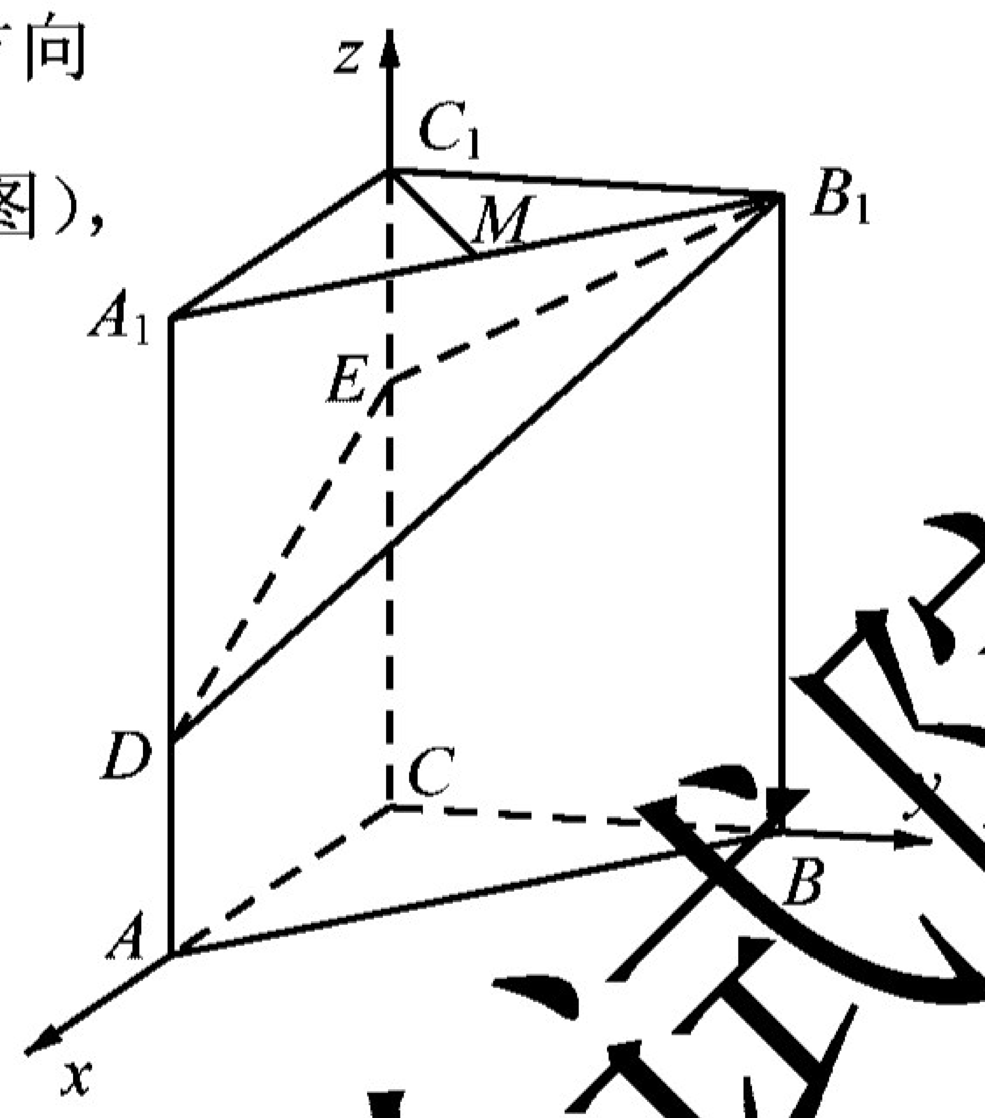
（Ⅱ）**解：** 在$\triangle ABC$中，由正弦定理及$C=\dfrac{\pi}{4}$，$a=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{13}$，可得$\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$．

（Ⅲ）**解：** 由$a<c$及$\sin A=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$，可得$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$，进而$\sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{12}{13}$，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\dfrac{5}{13}$．所以，

$$\sin\left(2A+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2A\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

（17）满分 15 分．

依题意，以 C 为原点，分别以 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CC_1}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系（如图），可得 $C(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C_1(0,0,3)$，$A_1(2,0,3)$，$B_1(0,2,3)$，$D(2,0,1)$，$E(0,0,2)$，$M(1,1,3)$．



（Ⅰ）**证明：**依题意，$\overrightarrow{C_1M}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{B_1D}=(2,-2,-2)$，从而 $\overrightarrow{C_1M}\cdot\overrightarrow{B_1D}=2-2+0=0$，所以 $C_1M\perp B_1D$．

（Ⅱ）**解：**依题意，$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$ 是平面 BB_1E 的一个法向量，$\overrightarrow{EB_1}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{ED}=(2,0,-1)$．设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 DB_1E 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y+z=0,\\ 2x-z=0.\end{cases}$ 不妨设 $x=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$．

因此有 $\cos\left\langle\overrightarrow{CA},\boldsymbol{n}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\boldsymbol{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，于是 $\sin\left\langle\overrightarrow{CA},\boldsymbol{n}\right\rangle=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$．

所以，二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$．

（Ⅲ）**解：**依题意，$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$．由（Ⅱ）知 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$ 为平面 DB_1E 的一个法向量，于是 $\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\boldsymbol{n}\right|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

所以，直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（18）满分 15 分．

（Ⅰ）**解：**由已知可得 $b=3$．记半焦距为 c，由 $|OF|=|OA|$ 可得 $c=b=3$．又由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $a^2=18$．所以，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$．

（Ⅱ）**解：**因为直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P，所以 $AB\perp CP$．依题意，

直线 AB 和直线 CP 的斜率均存在．设直线 AB 的方程为 $y=kx-3$．由方程组 $\begin{cases} y=kx-3, \\ \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1, \end{cases}$

消去 y，可得 $\left(2k^2+1\right)x^2-12kx=0$，解得 $x=0$，或 $x=\dfrac{12k}{2k^2+1}$．依题意，可得点 B 的坐标为 $\left(\dfrac{12k}{2k^2+1},\dfrac{6k^2-3}{2k^2+1}\right)$．因为 P 为线段 AB 的中点，点 A 的坐标为 $(0,-3)$，所以点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{6k}{2k^2+1},\dfrac{-3}{2k^2+1}\right)$．由 $3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$，得点 C 的坐标为 $(1,0)$，故直线 CP 的斜率为 $\dfrac{\dfrac{-3}{2k^2+1}-0}{\dfrac{6k}{2k^2+1}-1}$，即 $\dfrac{3}{2k^2-6k+1}$．又因为 $AB\perp CP$，所以 $k\cdot\dfrac{3}{2k^2-6k+1}=-1$，整理得 $2k^2-3k+1=0$，解得 $k=\dfrac{1}{2}$，或 $k=1$．

所以，直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x-3$，或 $y=x-3$．

（19）满分 15 分．

（Ⅰ）**解：** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q．由 $a_1=1$，$a_5=5\left(a_4-a_3\right)$，可得 $d=1$，从而 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$．由 $b_1=1$，$b_5=4\left(b_4-b_3\right)$，又 $q\neq 0$，可得 $q^2-4q+4=0$，解得 $q=2$，从而 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^{n-1}$．

（Ⅱ）**证明：** 由（Ⅰ）可得 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，故 $S_nS_{n+2}=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$，$S_{n+1}^2=\dfrac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$，从而 $S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=-\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)<0$，所以 $S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2$．

（Ⅲ）**解：** 当 n 为奇数时，$c_n=\dfrac{\left(3a_n-2\right)b_n}{a_na_{n+2}}=\dfrac{(3n-2)2^{n-1}}{n(n+2)}=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-\dfrac{2^{n-1}}{n}$；当 n 为偶数时，$c_n=\dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}=\dfrac{n-1}{2^n}$．

对任意的正整数 n，有

$$\sum_{k=1}^{n}c_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{2k}}{2k+1}-\frac{2^{2k-2}}{2k-1}\right)=\frac{2^{2n}}{2n+1}-1,$$

和

$$\sum_{k=1}^{n} c_{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{4^k} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \cdots + \frac{2n-1}{4^n}. \qquad ①$$

由①得

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} c_{2k} = \frac{1}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots + \frac{2n-3}{4^n} + \frac{2n-1}{4^{n+1}}. \qquad ②$$

由①②得 $\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} c_{2k} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{2}{4^n} - \frac{2n-1}{4^{n+1}} = \frac{\frac{2}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} - \frac{2n-1}{4^{n+1}}$，从而得

$$\sum_{k=1}^{n} c_{2k} = \frac{5}{9} - \frac{6n+5}{9\times 4^n}.$$

因此，$\sum_{k=1}^{2n} c_k = \sum_{k=1}^{n} c_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} c_{2k} = \frac{4^n}{2n+1} - \frac{6n+5}{9\times 4^n} - \frac{4}{9}$.

所以，数列$\{c_n\}$的前$2n$项和为$\frac{4^n}{2n+1} - \frac{6n+5}{9\times 4^n} - \frac{4}{9}$.

（20）满分 16 分.

（Ⅰ）（ⅰ）**解**：当$k=6$时，$f(x)=x^3+6\ln x$，故$f'(x)=3x^2+\frac{6}{x}$．可得$f(1)=1$，$f'(1)=9$，所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-1=9(x-1)$，即$y=9x-8$.

（ⅱ）**解**：依题意，$g(x)=x^3-3x^2+6\ln x+\frac{3}{x}$，$x\in(0,+\infty)$．从而可得

$g'(x)=3x^2-6x+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}$，整理可得$g'(x)=\frac{3(x-1)^3(x+1)}{x^2}$．令$g'(x)=0$，解得$x=1$.

当x变化时，$g'(x)$，$g(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以，函数$g(x)$的单调递减区间为$(0,1)$，单调递增区间为$(1,+\infty)$；$g(x)$的极小值为$g(1)=1$，无极大值.

（Ⅱ）**证明：** 由 $f(x)=x^3+k\ln x$，得 $f'(x)=3x^2+\dfrac{k}{x}$.

对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t$ （$t>1$），则

$$
\begin{aligned}
&(x_1-x_2)\left(f'(x_1)+f'(x_2)\right)-2\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\\
&=(x_1-x_2)\left(3x_1^2+\frac{k}{x_1}+3x_2^2+\frac{k}{x_2}\right)-2\left(x_1^3-x_2^3+k\ln\frac{x_1}{x_2}\right)\\
&=x_1^3-x_2^3-3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+k\left(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)-2k\ln\frac{x_1}{x_2}\\
&=x_2^3\left(t^3-3t^2+3t-1\right)+k\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right). \qquad ①
\end{aligned}
$$

令 $h(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$，$x\in[1,+\infty)$．当 $x>1$ 时，$h'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2>0$，由此可得 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增，所以当 $t>1$ 时，$h(t)>h(1)$，即 $t-\dfrac{1}{t}-2\ln t>0$．因为 $x_2\geqslant 1$，$t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3>0$，$k\geqslant -3$，所以

$$
\begin{aligned}
x_2^3\left(t^3-3t^2+3t-1\right)+k\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)&\geqslant\left(t^3-3t^2+3t-1\right)-3\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)\\
&=t^3-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}-1. \qquad ②
\end{aligned}
$$

由（Ⅰ）（ii）可知，当 $t>1$ 时，$g(t)>g(1)$，即 $t^3-3t^2+6\ln t+\dfrac{3}{t}>1$，故

$$t^3-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}-1>0. \qquad ③$$

由①②③可得 $(x_1-x_2)\left(f'(x_1)+f'(x_2)\right)-2\left(f(x_1)-f(x_2)\right)>0$．所以，当 $k\geqslant -3$ 时，对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，有

$$\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$