绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　学

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。第Ⅰ卷 1 至 3 页，第Ⅱ卷 4 至 6 页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利!

第Ⅰ卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分。

参考公式：

- 如果事件 A 与事件 B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
- 如果事件 A 与事件 B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$.
- 球的表面积公式 $S=4\pi R^2$，其中 R 表示球的半径.

一．选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）设全集 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{-3,0,2,3\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$

（A）$\{-3,3\}$　　（B）$\{0,2\}$

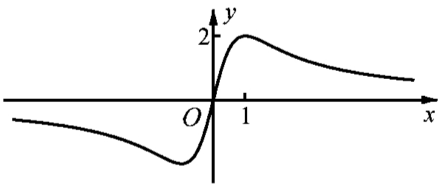
（C）$\{-1,1\}$　　（D）$\{-3,-2,-1,1,3\}$

（2）设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a>1$”是“$a^2>a$”的

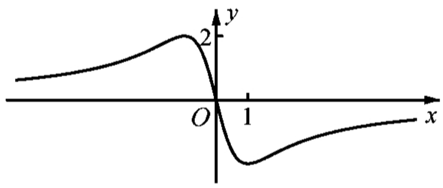
（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

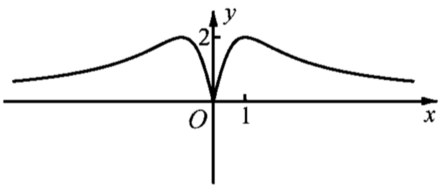
（3）函数 $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$ 的图象大致为



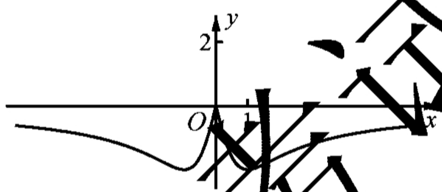
（A）



（B）

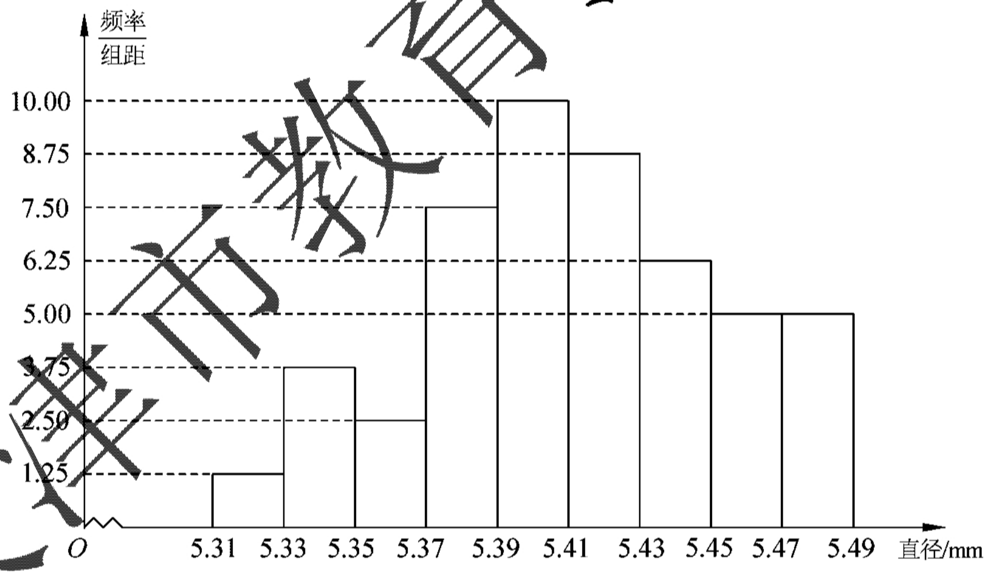


（C）



（D）

（4）从一批零件中抽取 80 个，测量其直径（单位：mm），将所得数据分为 9 组：$[5.31,5.33)$，$[5.33,5.35)$，…，$[5.45,5.47)$，$[5.47,5.49]$，并整理得到如下频率分布直方图，则在被抽取的零件中，直径落在区间 $[5.43,5.47)$ 内的个数为



（A）10　　　　（B）18

（C）20　　　　（D）36

（5）若棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为

（A）12π　　（B）24π　　（C）36π　　（D）144π

（6）设 $a=3^{0.7}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$，$c=\log_{0.7}0.8$，则 a，b，c 的大小关系为

（A）$a<b<c$　　（B）$b<a<c$

（C）$b<c<a$　　（D）$c<a<b$

（7）设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$），过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点和点 $(0,b)$ 的直线为 l．若 C 的一条渐近线与 l 平行，另一条渐近线与 l 垂直，则双曲线 C 的方程为

（A）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$　　（B）$x^2-\frac{y^2}{4}=1$

（C）$\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　（D）$x^2-y^2=1$

（8）已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$．给出下列结论：

① $f(x)$ 的最小正周期为 2π；

② $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值；

③ 把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，可得到函数 $y=f(x)$ 的图象．

其中所有正确结论的序号是

（A）①　　（B）①③

（C）②③　　（D）①②③

（9）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-\left|kx^2-2x\right|$（$k\in\mathbf{R}$）恰有 4 个零点，则 k 的取值范围是

（A）$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$　　（B）$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0,2\sqrt{2}\right)$

（C）$(-\infty,0)\cup\left(0,2\sqrt{2}\right)$　　（D）$(-\infty,0)\cup\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$

绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　学

第Ⅱ卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2．本卷共11小题，共105分。

二．填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．试题中包含两个空的，答对1个的给3分，全部答对的给5分．

（10）i是虚数单位，复数 $\dfrac{8-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=$____________.

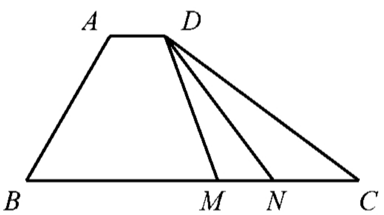
（11）在 $\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ 的展开式中，x^2 的系数是____________.

（12）已知直线 $x-\sqrt{3}y+8=0$ 和圆 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 相交于 A，B 两点．若 $|AB|=6$，则 r 的值为____________.

（13）已知甲、乙两球落入盒子的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{1}{3}$．假定两球是否落入盒子互不影响，则甲、乙两球都落入盒子的概率为____________；甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为____________.

（14）已知 $a>0$，$b>0$，且 $ab=1$，则 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{8}{a+b}$ 的最小值为____________.

（15）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^\circ$，$AB=3$，$BC=6$，且 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{3}{2}$，则实数 λ 的值为____________，若 M，N 是线段 BC 上的动点，且 $|\overrightarrow{MN}|=1$，则 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为____________.



第（15）题图

三．解答题：本大题共 5 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（16）（**本小题满分 14 分**）

在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c．已知$a=2\sqrt{2}$，$b=5$，$c=\sqrt{13}$．

（Ⅰ）求角C的大小；

（Ⅱ）求$\sin A$的值；

（Ⅲ）求$\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{4}\right)$的值．

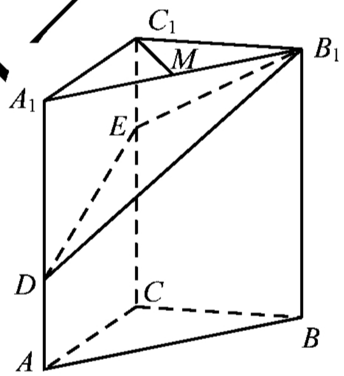
（17）（**本小题满分 15 分**）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CC_1\perp$平面ABC，$AC\perp BC$，$AC=BC=2$，$CC_1=3$，点D，E分别在棱AA_1和棱CC_1上，且$AD=1$，$CE=2$，M为棱A_1B_1的中点．

（Ⅰ）求证：$C_1M\perp B_1D$；

（Ⅱ）求二面角$B-B_1E-D$的正弦值；

（Ⅲ）求直线AB与平面DB_1E所成角的正弦值．



（18）（**本小题满分 15 分**）

已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的一个顶点为$A(0,-3)$，右焦点为$F$，且$|OA|=|OF|$，其中$O$为原点．

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）已知点C满足$3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$，点$B$在椭圆上（$B$异于椭圆的顶点），直线$AB$与以$C$为圆心的圆相切于点$P$，且$P$为线段$AB$的中点．求直线$AB$的方程．

（19）（**本小题满分 15 分**）

已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，$a_1=b_1=1$，$a_5=5(a_4-a_3)$，$b_5=4(b_4-b_3)$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）记$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求证：$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2$（$n\in\mathbf{N}^*$）；

（Ⅲ）对任意的正整数n，设$c_n=\begin{cases}\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}, & n\text{为奇数},\\ \dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和.

（20）（**本小题满分 16 分**）

已知函数$f(x)=x^3+k\ln x$（$k\in\mathbf{R}$），$f'(x)$为$f(x)$的导函数.

（Ⅰ）当$k=6$时，

（ⅰ）求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（ⅱ）求函数$g(x)=f(x)-f'(x)+\dfrac{9}{x}$的单调区间和极值；

（Ⅱ）当$k\geqslant-3$时，求证：对任意的x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且$x_1>x_2$，有

$$\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$