

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（文史类）参考解答

一. 选择题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题5分，满分40分.

- (1) D (2) C (3) B (4) B
(5) A (6) D (7) C (8) D

二. 填空题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题5分，满分30分.

- (9) $\sqrt{13}$ (10) $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ (11) $x+2y-2=0$
(12) $\frac{\pi}{4}$ (13) $\frac{9}{2}$ (14) -1

三. 解答题

(15) 本小题主要考查随机抽样、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式等基本知识. 考查运用概率知识解决简单实际问题的能力. 满分13分.

解：(I) 由已知，老、中、青员工人数之比为6:9:10，由于采用分层抽样的方法从中抽取25位员工，因此应从老、中、青员工中分别抽取6人，9人，10人.

(II) (i) 从已知的6人中随机抽取2人的所有可能结果为

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{B, F\}, \{C, D\},$
 $\{C, E\}, \{C, F\}, \{D, E\}, \{D, F\}, \{E, F\}$ ，共15种.

(ii) 由表格知，符合题意的所有可能结果为 $\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\},$
 $\{B, D\}, \{B, E\}, \{B, F\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{D, F\}, \{E, F\}$ ，共11种.

所以，事件M发生的概率 $P(M) = \frac{11}{15}$.

(16) 本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和的正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识. 考查运算求解能力. 满分13分.

(I) 解: 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $b \sin C = c \sin B$, 又由

$3c \sin B = 4a \sin C$, 得 $3b \sin C = 4a \sin C$, 即 $3b = 4a$. 又因为 $b + c = 2a$, 得到 $b = \frac{4}{3}a$,

$c = \frac{2}{3}a$. 由余弦定理可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a} = -\frac{1}{4}$.

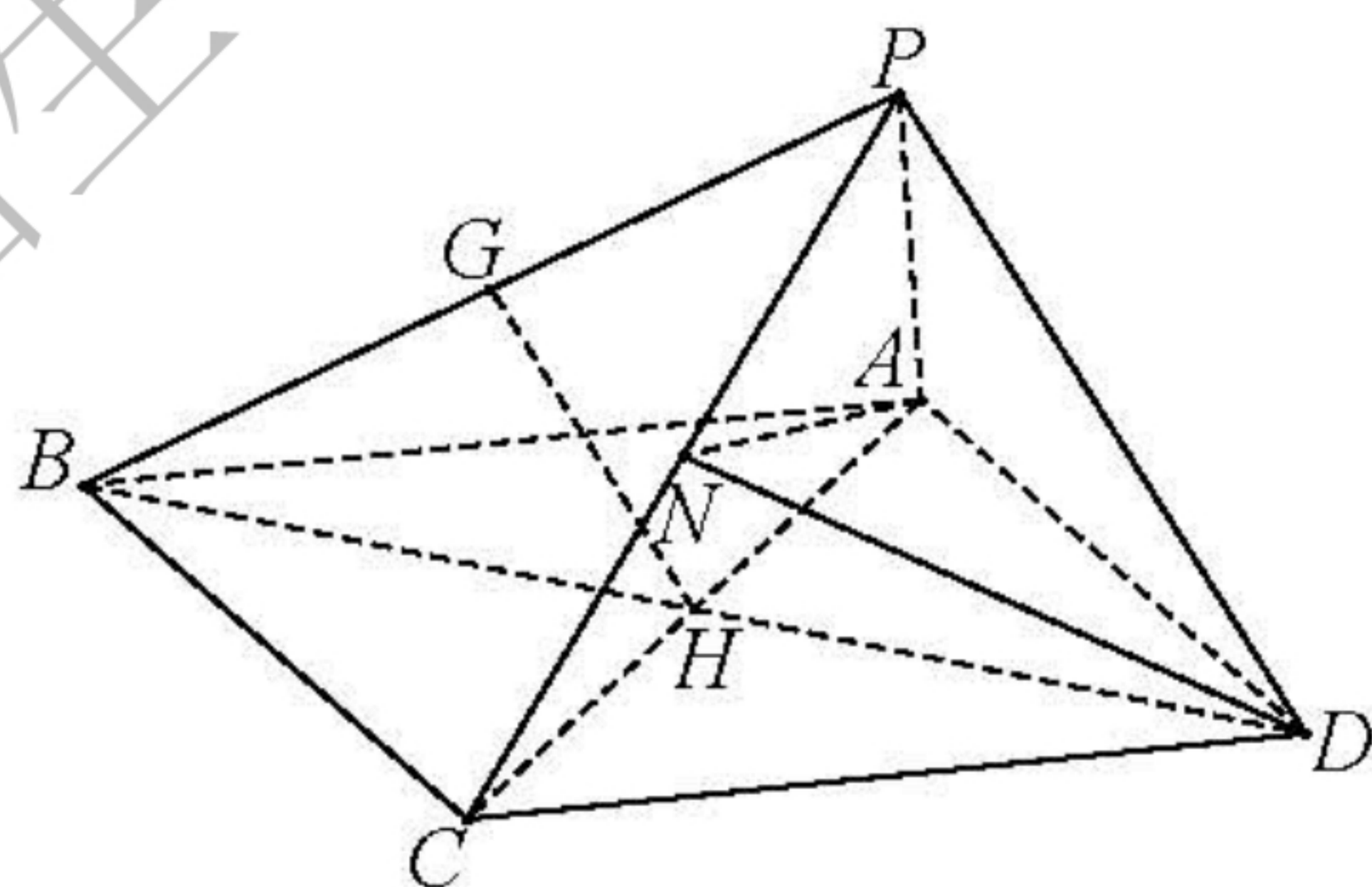
(II) 解: 由 (I) 可得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 从而 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = -\frac{\sqrt{15}}{8}$,

$\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = -\frac{7}{8}$, 故

$$\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{5} + 7}{16}.$$

(17) 本小题主要考查直线与平面平行、直线与平面垂直、平面与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识. 考查空间想象能力和推理论证能力. 满分 13 分.

(I) 证明: 连接 BD , 易知 $AC \cap BD = H$, $BH = DH$. 又由 $BG = PG$, 故 $GH \parallel PD$. 又因为 $GH \not\subset$ 平面 PAD , $PD \subset$ 平面 PAD , 所以 $GH \parallel$ 平面 PAD .



(II) 证明: 取棱 PC 的中点 N , 连接 DN . 依题意, 得 $DN \perp PC$. 又因为平面 $PAC \perp$ 平面 PCD , 平面 $PAC \cap$ 平面 $PCD = PC$, 所以 $DN \perp$ 平面 PAC , 又 $PA \subset$ 平面 PAC , 故 $DN \perp PA$. 又已知 $PA \perp CD$, $CD \cap DN = D$, 所以 $PA \perp$ 平面 PCD .

(III) 解: 连接 AN , 由 (II) 中 $DN \perp$ 平面 PAC , 可知 $\angle DAN$ 为直线 AD 与平面 PAC 所成的角.

因为 $\triangle PCD$ 为等边三角形, $CD = 2$ 且 N 为 PC 的中点, 所以 $DN = \sqrt{3}$. 又 $DN \perp AN$,

在 $\text{Rt} \triangle AND$ 中, $\sin \angle DAN = \frac{DN}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以, 直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(18) 本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前 n 项和公式等基础知识. 考查数列求和的基本方法和运算求解能力. 满分 13 分.

(I) **解:** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q . 依题意, 得

$$\begin{cases} 3q = 3 + 2d, \\ 3q^2 = 15 + 4d, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} d = 3, \\ q = 3, \end{cases} \text{故 } a_n = 3 + 3(n-1) = 3n, \quad b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n.$$

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3^n$.

(II) **解:** $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n}$

$$\begin{aligned} &= (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2b_1 + a_4b_2 + a_6b_3 + \cdots + a_{2n}b_n) \\ &= \left[n \times 3 + \frac{n(n-1)}{2} \times 6 \right] + (6 \times 3^1 + 12 \times 3^2 + 18 \times 3^3 + \cdots + 6n \times 3^n) \\ &= 3n^2 + 6(1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^n). \end{aligned}$$

记 $T_n = 1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^n, \quad \textcircled{1}$

则 $3T_n = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + n \times 3^{n+1}, \quad \textcircled{2}$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 得, } 2T_n = -3 - 3^2 - 3^3 - \cdots - 3^n + n \times 3^{n+1} = -\frac{3(1-3^n)}{1-3} + n \times 3^{n+1} = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n} &= 3n^2 + 6T_n = 3n^2 + 3 \times \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{2} \\ &= \frac{(2n-1)3^{n+2} + 6n^2 + 9}{2} \quad (n \in \mathbf{N}^*). \end{aligned}$$

(19) 本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程、圆等基础知识. 考查用代数方法研究圆锥曲线的性质. 考查运算求解能力, 以及用方程思想、数形结合思想解决问题的能力. 满分 14 分.

(I) **解:** 设椭圆的半焦距为 c , 由已知有 $\sqrt{3}a = 2b$, 又由 $a^2 = b^2 + c^2$, 消去 b 得

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^2 + c^2, \text{ 解得 } \frac{c}{a} = \frac{1}{2}.$$

所以, 椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(II)解: 由(I)知, $a=2c, b=\sqrt{3}c$, 故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$. 由题意, $F(-c, 0)$,

则直线 l 的方程为 $y = \frac{3}{4}(x+c)$. 点 P 的坐标满足 $\begin{cases} \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1, \\ y = \frac{3}{4}(x+c), \end{cases}$ 消去 y 并化简, 得到

$7x^2 + 6cx - 13c^2 = 0$, 解得 $x_1 = c, x_2 = -\frac{13c}{7}$. 代入到 l 的方程, 解得 $y_1 = \frac{3}{2}c, y_2 = -\frac{9}{14}c$. 因

为点 P 在 x 轴上方, 所以 $P\left(c, \frac{3}{2}c\right)$.

由圆心 C 在直线 $x=4$ 上, 可设 $C(4, t)$. 因为 $OC \parallel AP$, 且由(I)知 $A(-2c, 0)$,

故 $\frac{t}{4} = \frac{\frac{3}{2}c}{c+2c}$, 解得 $t=2$. 因为圆 C 与 x 轴相切, 所以圆的半径长为 2, 又由圆 C 与 l 相

切, 得 $\frac{\left|\frac{3}{4}(4+c)-2\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = 2$, 可得 $c=2$.

所以, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

(20) 本小题主要考查导数的运算, 不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法. 考查函数思想、化归与转化思想. 考查综合分析问题和解决问题的能力. 满分 14 分.

(I)解: 由已知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且

$$f'(x) = \frac{1}{x} - [ae^x + a(x-1)e^x] = \frac{1-ax^2e^x}{x}.$$

因此当 $a \leq 0$ 时, $1-ax^2e^x > 0$, 从而 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增.

(II)证明: (i) 由(I)知, $f'(x) = \frac{1-ax^2e^x}{x}$. 令 $g(x) = 1-ax^2e^x$, 由 $0 < a < \frac{1}{e}$,

可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 又 $g(1) = 1-ae > 0$, 且

$$g\left(\ln \frac{1}{a}\right) = 1 - a \left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{a} = 1 - \left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 < 0,$$

故 $g(x)=0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解, 从而 $f'(x)=0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解, 不妨设为 x_0 ,

则 $1 < x_0 < \ln \frac{1}{a}$. 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{x} > \frac{g(x_0)}{x} = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调

递增; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{x} < \frac{g(x_0)}{x} = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调递减,

因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

令 $h(x) = \ln x - x + 1$, 则当 $x > 1$ 时, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$, 故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减,

从而当 $x > 1$ 时, $h(x) < h(1) = 0$, 所以 $\ln x < x - 1$. 从而

$$f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \ln \ln \frac{1}{a} - a \left(\ln \frac{1}{a} - 1\right) e^{\ln \frac{1}{a}} = \ln \ln \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} + 1 = h\left(\ln \frac{1}{a}\right) < 0,$$

又因为 $f(x_0) > f(1) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内有唯一零点. 又 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内有唯

一零点 1, 从而, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恰有两个零点.

(ii) 由题意, $\begin{cases} f'(x_0) = 0, \\ f(x_1) = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} ax_0^2 e^{x_0} = 1, \\ \ln x_1 = a(x_1 - 1)e^{x_1}, \end{cases}$ 从而 $\ln x_1 = \frac{x_1 - 1}{x_0^2} e^{x_1 - x_0}$, 即

$e^{x_1 - x_0} = \frac{x_0^2 \ln x_1}{x_1 - 1}$. 因为当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$, 又 $x_1 > x_0 > 1$, 故 $e^{x_1 - x_0} < \frac{x_0^2 (x_1 - 1)}{x_1 - 1} = x_0^2$, 两

边取对数, 得 $\ln e^{x_1 - x_0} < \ln x_0^2$, 于是

$$x_1 - x_0 < 2 \ln x_0 < 2(x_0 - 1),$$

整理得 $3x_0 - x_1 > 2$.