

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）参考解答

一. 选择题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题5分，满分40分.

- (1) D (2) C (3) B (4) B
 (5) D (6) A (7) C (8) C

二. 填空题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题5分，满分30分.

- (9) $\sqrt{13}$ (10) 28 (11) $\frac{\pi}{4}$
 (12) $\frac{3}{4}$ (13) $4\sqrt{3}$ (14) -1

三. 解答题

(15) 本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和的正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识. 考查运算求解能力. 满分13分.

(I) 解：在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，得 $b \sin C = c \sin B$ ，又由 $3c \sin B = 4a \sin C$ ，得 $3b \sin C = 4a \sin C$ ，即 $3b = 4a$. 又因为 $b + c = 2a$ ，得到 $b = \frac{4}{3}a$ ，

$c = \frac{2}{3}a$. 由余弦定理可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a} = -\frac{1}{4}$.

(II) 解：由(I)可得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ，从而 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = -\frac{\sqrt{15}}{8}$ ，
 $\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = -\frac{7}{8}$ ，故

$$\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{5} + 7}{16}.$$

(16) 本小题主要考查离散型随机变量的分布列与数学期望，互斥事件和相互独立事件的概率计算公式等基础知识. 考查运用概率知识解决简单实际问题的能力. 满分13分.

(I) 解：因为甲同学上学期间的三天中到校情况相互独立，且每天7:30之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$ ，故 $X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$ ，从而 $P(X = k) = C_3^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}$ ， $k = 0, 1, 2, 3$.

所以，随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$.

(II) **解:** 设乙同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数为 Y , 则 $Y \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$,

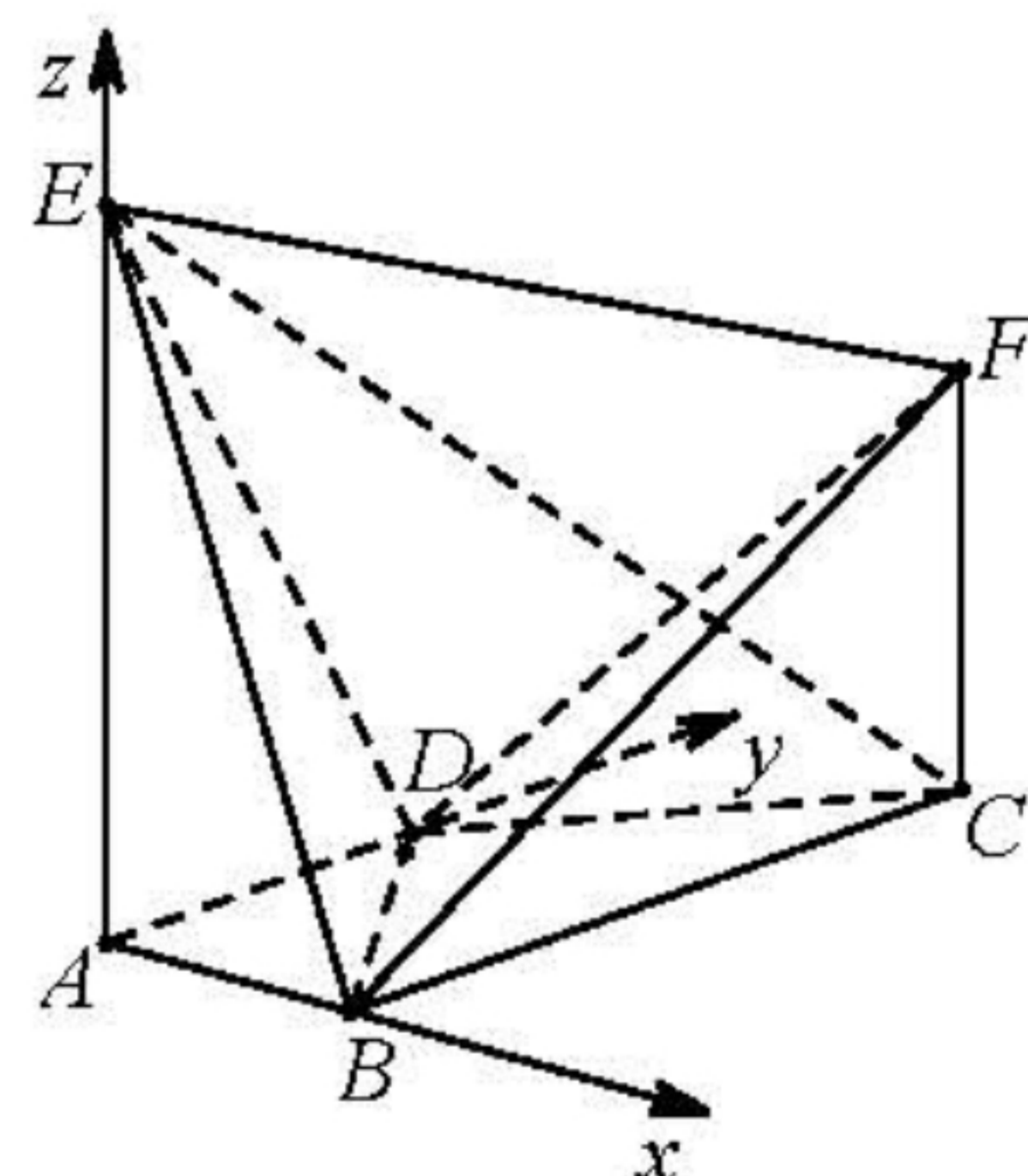
且 $M = \{X=3, Y=1\} \cup \{X=2, Y=0\}$. 由题意知事件 $\{X=3, Y=1\}$ 与 $\{X=2, Y=0\}$ 互

斥, 且事件 $\{X=3\}$ 与 $\{Y=1\}$, 事件 $\{X=2\}$ 与 $\{Y=0\}$ 均相互独立, 从而由 (I) 知

$$\begin{aligned} P(M) &= P(\{X=3, Y=1\} \cup \{X=2, Y=0\}) = P(X=3, Y=1) + P(X=2, Y=0) \\ &= P(X=3)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=0) = \frac{8}{27} \times \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{27} = \frac{20}{243}. \end{aligned}$$

(17) 本小题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识. 考查用空间向量解决立体几何问题的方法. 考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力. 满分 13 分.

依题意, 可以建立以 A 为原点, 分别以 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE} 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴正方向的空间直角坐标系 (如图), 可得 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $E(0, 0, 2)$. 设 $CF = h$ ($h > 0$), 则 $F(1, 2, h)$.



(I) **证明:** 依题意, $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$ 是平面 ADE 的法向量, 又 $\overrightarrow{BF} = (0, 2, h)$, 可得 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 又因为直线 $BF \not\subset$ 平面 ADE , 所以 $BF \parallel$ 平面 ADE .

(II) **解:** 依题意, $\overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (-1, 0, 2)$, $\overrightarrow{CE} = (-1, -2, 2)$.

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 BDE 的法向量, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x + y = 0, \\ -x + 2z = 0, \end{cases}$ 不妨令 $z = 1$,

可得 $\mathbf{n} = (2, 2, 1)$. 因此有 $\cos \langle \overrightarrow{CE}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CE} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{CE}| |\mathbf{n}|} = -\frac{4}{9}$.

所以, 直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{4}{9}$.

(III) 解: 设 $m = (x, y, z)$ 为平面 BDF 的法向量, 则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x + y = 0, \\ 2y + hz = 0, \end{cases}$

不妨令 $y = 1$, 可得 $m = \left(1, 1, -\frac{2}{h}\right)$.

由题意, 有 $|\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m||n|} = \frac{\left|4 - \frac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2 + \frac{4}{h^2}}} = \frac{1}{3}$, 解得 $h = \frac{8}{7}$. 经检验, 符合题意.

所以, 线段 CF 的长为 $\frac{8}{7}$.

(18) 本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识. 考查用代数方法研究圆锥曲线的性质. 考查运算求解能力, 以及用方程思想解决问题的能力. 满分 13 分.

(I) 解: 设椭圆的半焦距为 c , 依题意, $2b = 4$, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 又 $a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $a = \sqrt{5}$, $b = 2$, $c = 1$.

所以, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(II) 解: 由题意, 设 $P(x_P, y_P)$ ($x_P \neq 0$), $M(x_M, 0)$. 设直线 PB 的斜率为 k ($k \neq 0$),

又 $B(0, 2)$, 则直线 PB 的方程为 $y = kx + 2$, 与椭圆方程联立 $\begin{cases} y = kx + 2, \\ \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$ 整理得

$(4 + 5k^2)x^2 + 20kx = 0$, 可得 $x_P = -\frac{20k}{4 + 5k^2}$, 代入 $y = kx + 2$ 得 $y_P = \frac{8 - 10k^2}{4 + 5k^2}$, 进而直线 OP

的斜率 $\frac{y_P}{x_P} = \frac{4 - 5k^2}{-10k}$. 在 $y = kx + 2$ 中, 令 $y = 0$, 得 $x_M = -\frac{2}{k}$. 由题意得 $N(0, -1)$, 所以

直线 MN 的斜率为 $-\frac{k}{2}$. 由 $OP \perp MN$, 得 $\frac{4 - 5k^2}{-10k} \cdot \left(-\frac{k}{2}\right) = -1$, 化简得 $k^2 = \frac{24}{5}$, 从而

$k = \pm \frac{2\sqrt{30}}{5}$.

所以, 直线 PB 的斜率为 $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 或 $-\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

(19) 本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前 n 项和公式等基础知识. 考查化归与转化思想和数列求和的基本方法以及运算求解能力. 满分 14 分.

(I) 解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q . 依题意得

$$\begin{cases} 6q = 6 + 2d, \\ 6q^2 = 12 + 4d, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} d = 3, \\ q = 2, \end{cases} \text{故 } a_n = 4 + (n-1) \times 3 = 3n + 1, \quad b_n = 6 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n.$$

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n + 1$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3 \times 2^n$.

(II) (i) 解: $a_{2^n} (c_{2^n} - 1) = a_{2^n} (b_n - 1) = (3 \times 2^n + 1)(3 \times 2^n - 1) = 9 \times 4^n - 1$.

所以, 数列 $\{a_{2^n} (c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式为 $a_{2^n} (c_{2^n} - 1) = 9 \times 4^n - 1$.

(ii) 解: $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i = \sum_{i=1}^{2^n} [a_i + a_i (c_i - 1)] = \sum_{i=1}^{2^n} a_i + \sum_{i=1}^{2^n} a_i (c_i - 1)$

$$= \left(2^n \times 4 + \frac{2^n(2^n - 1)}{2} \times 3 \right) + \sum_{i=1}^n (9 \times 4^i - 1)$$

$$= (3 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{2n-1}) + 9 \times \frac{4(1 - 4^n)}{1 - 4} - n$$

$$= 27 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{2n-1} - n - 12 \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

(20) 本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法. 考查函数思想和化归与转化思想. 考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力. 满分 14 分.

(I) 解: 由已知, 有 $f'(x) = e^x (\cos x - \sin x)$. 因此, 当 $x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \right)$

($k \in \mathbf{Z}$) 时, 有 $\sin x > \cos x$, 得 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4} \right)$

($k \in \mathbf{Z}$) 时, 有 $\sin x < \cos x$, 得 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增.

所以, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4} \right]$ ($k \in \mathbf{Z}$), $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \right]$ ($k \in \mathbf{Z}$).

(II) **证明:** 记 $h(x) = f(x) + g(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. 依题意及(I), 有 $g(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,

从而 $g'(x) = -2e^x \sin x$. 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$, 故

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + g(x)(-1) = g'(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < 0.$$

因此, $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 进而 $h(x) \geq h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

所以, 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) + g(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$.

(III) **证明:** 依题意, $u(x_n) = f(x_n) - 1 = 0$, 即 $e^{x_n} \cos x_n = 1$. 记 $y_n = x_n - 2n\pi$, 则

$y_n \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $f(y_n) = e^{y_n} \cos y_n = e^{x_n - 2n\pi} \cos(x_n - 2n\pi) = e^{-2n\pi}$ ($n \in \mathbf{N}$).

由 $f(y_n) = e^{-2n\pi} \leq 1 = f(y_0)$ 及(I), 得 $y_n \geq y_0$. 由(II)知, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时,

$g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数, 因此 $g(y_n) \leq g(y_0) < g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. 又由(II)

知, $f(y_n) + g(y_n)\left(\frac{\pi}{2} - y_n\right) \geq 0$, 故

$$\frac{\pi}{2} - y_n \leq -\frac{f(y_n)}{g(y_n)} = -\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_n)} \leq -\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_0)} = \frac{e^{-2n\pi}}{e^{y_0}(\sin y_0 - \cos y_0)} < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}.$$

所以, $2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n \leq \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}$.