绝密★启用前

2018年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）参考解答

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分40分．

（1）B	（2）C	（3）B	（4）A
（5）D	（6）A	（7）C	（8）A

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分30分．

（9）$4-\mathrm{i}$	（10）$\dfrac{5}{2}$	（11）$\dfrac{1}{12}$
（12）$\dfrac{1}{2}$	（13）$\dfrac{1}{4}$	（14）$(4,8)$

三．解答题

（15）本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角差的正弦与余弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识，考查运算求解能力．满分13分．

（Ⅰ）**解：**在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得$b\sin A=a\sin B$，又由$b\sin A=a\cos\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，得$a\sin B=a\cos\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，即$\sin B=\cos\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，可得$\tan B=\sqrt{3}$．又因为$B\in(0,\pi)$，可得$B=\dfrac{\pi}{3}$．

（Ⅱ）**解：**在$\triangle ABC$中，由余弦定理及$a=2$，$c=3$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，有$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，故$b=\sqrt{7}$．

由$b\sin A=a\cos\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，可得$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．因为$a<c$，故$\cos A=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$．因此

$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = \dfrac{1}{7}$．所以，

$$\sin\left(2A-B\right)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

（16）本小题主要考查随机抽样、离散型随机变量的分布列与数学期望、互斥事件的概率加法公式等基础知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分 13 分．

（Ⅰ）**解：**由已知，甲、乙、丙三个部门的员工人数之比为$3:2:2$，由于采用分层抽样的方法从中抽取7人，因此应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取3人，2人，2人．

（Ⅱ）（ⅰ）**解：**随机变量X的所有可能取值为0，1，2，3．

$$P\left(X=k\right)=\frac{C_4^k\cdot C_3^{3-k}}{C_7^3}\quad(k=0,1,2,3).$$

所以，随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{4}{35}$

随机变量X的数学期望$E\left(X\right)=0\times\dfrac{1}{35}+1\times\dfrac{12}{35}+2\times\dfrac{18}{35}+3\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{12}{7}$．

（ⅱ）**解：**设事件B为“抽取的3人中，睡眠充足的员工有1人，睡眠不足的员工有2人”；事件C为“抽取的3人中，睡眠充足的员工有2人，睡眠不足的员工有1人”，则$A=B\cup C$，且B与C互斥．由（ⅰ）知，$P\left(B\right)=P\left(X=2\right)$，$P\left(C\right)=P\left(X=1\right)$，故

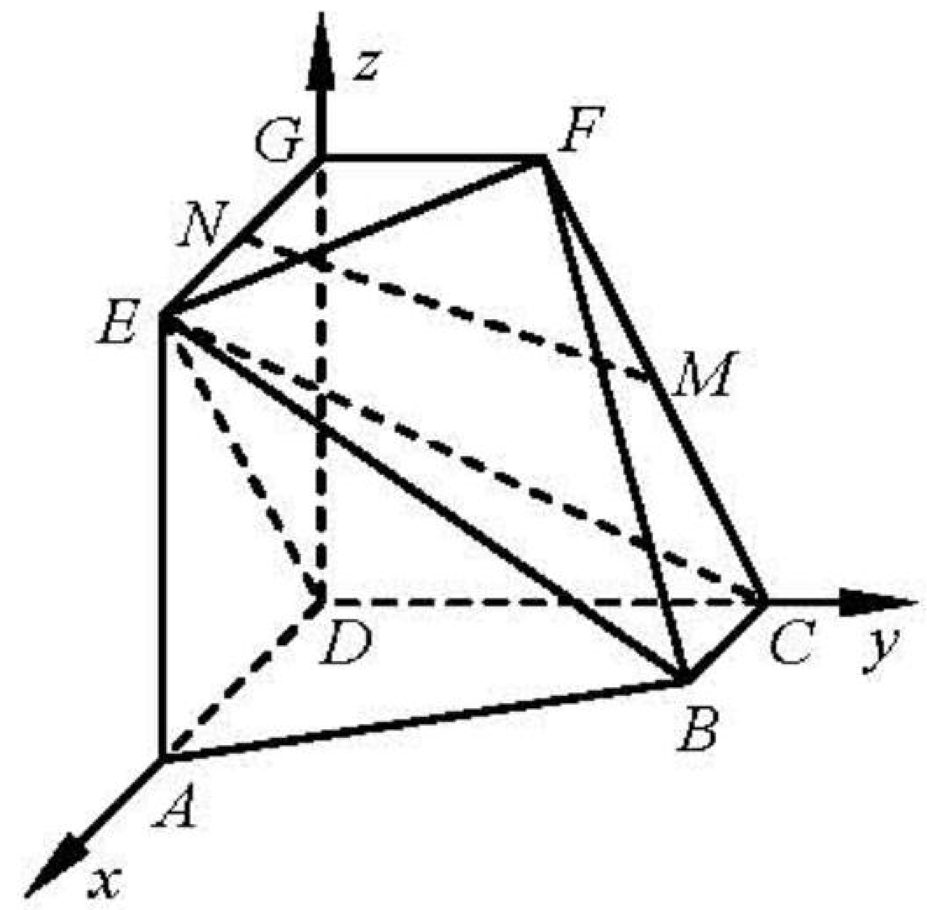
$$P\left(A\right)=P\left(B\cup C\right)=P\left(X=2\right)+P\left(X=1\right)=\frac{6}{7}.$$

所以，事件A发生的概率为$\dfrac{6}{7}$．

（17）本小题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识．考查用空间向量解决立体几何问题的方法．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．满分 13 分．

依题意，可以建立以D为原点，分别以$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DG}$的方向为x轴，y轴，z轴的正方向的空间直角坐标系(如图)，可得$D\left(0,0,0\right)$，$A\left(2,0,0\right)$，$B\left(1,2,0\right)$，$C\left(0,2,0\right)$，$E\left(2,0,2\right)$，$F\left(0,1,2\right)$，$G\left(0,0,2\right)$，$M\left(0,\dfrac{3}{2},1\right)$，$N\left(1,0,2\right)$．

（Ⅰ）**证明：** 依题意 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DE}=(2,0,2)$. 设 $\boldsymbol{n}_0=(x,y,z)$ 为平面 CDE 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_0\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}_0\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ 2x+2z=0,\end{cases}$ 不妨令 $z=-1$，可得 $\boldsymbol{n}_0=(1,0,-1)$. 又 $\overrightarrow{MN}=\left(1,-\dfrac{3}{2},1\right)$，可得 $\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}_0=0$，又因为直线 $MN\not\subset$ 平面 CDE，所以 MN // 平面 CDE.



（Ⅱ）**解：** 依题意，可得 $\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{CF}=(0,-1,2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BCE 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x=0,\\ x-2y+2z=0,\end{cases}$ 不妨令 $z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 BCF 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x=0,\\ -y+2z=0,\end{cases}$ 不妨令 $z=1$，可得 $\boldsymbol{m}=(0,2,1)$.

因此有 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，于是 $\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

所以，二面角 $E-BC-F$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

（Ⅲ）**解：** 设线段 DP 的长为 h（$h\in[0,2]$），则点 P 的坐标为 $(0,0,h)$，可得 $\overrightarrow{BP}=(-1,-2,h)$. 易知，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$ 为平面 $ADGE$ 的一个法向量，故

$$\left|\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{DC}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DC}\right|}{\left|\overrightarrow{BP}\right|\left|\overrightarrow{DC}\right|}=\frac{2}{\sqrt{h^2+5}},$$

由题意，可得 $\dfrac{2}{\sqrt{h^2+5}}=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\in[0,2]$.

所以，线段 DP 的长为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（18）本小题主要考查等差数列的通项公式，等比数列的通项公式及其前 n 项和公式等基础知识．考查数列求和的基本方法和运算求解能力．满分 13 分．

（Ⅰ）**解：** 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q．由 $a_1=1$，$a_3=a_2+2$，可得 $q^2-q-2=0$．因为 $q>0$，可得 $q=2$，故 $a_n=2^{n-1}$．

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d．由 $a_4=b_3+b_5$，可得 $b_1+3d=4$．由 $a_5=b_4+2b_6$，可得 $3b_1+13d=16$，从而 $b_1=1$，$d=1$，故 $b_n=n$．

所以，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=n$．

（Ⅱ）（ⅰ）**解：** 由（Ⅰ），有 $S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，故

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(2^k-1\right)=\sum_{k=1}^{n}2^k-n=\frac{2\times\left(1-2^n\right)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2.$$

（ⅱ）**证明：** 因为

$$\frac{\left(T_k+b_{k+2}\right)b_k}{(k+1)(k+2)}=\frac{\left(2^{k+1}-k-2+k+2\right)k}{(k+1)(k+2)}=\frac{k\cdot 2^{k+1}}{(k+1)(k+2)}=\frac{2^{k+2}}{k+2}-\frac{2^{k+1}}{k+1},$$

所以，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(T_k+b_{k+2}\right)b_k}{(k+1)(k+2)}=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right)+\left(\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{2^{n+2}}{n+2}-\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{2^{n+2}}{n+2}-2.$$

（19）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识．考查用代数方法研究圆锥曲线的性质．考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解：** 设椭圆的焦距为 $2c$，由已知有 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{5}{9}$，又由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $2a=3b$．由已知可得，$|FB|=a$，$|AB|=\sqrt{2}b$，由 $|FB|\cdot|AB|=6\sqrt{2}$，可得 $ab=6$，从而 $a=3$，$b=2$．

所以，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$．

（Ⅱ）**解：** 设点 P 的坐标为 (x_1,y_1)，点 Q 的坐标为 (x_2,y_2)．由已知有 $y_1>y_2>0$，

故$|PQ|\sin\angle AOQ = y_1 - y_2$．又因为$|AQ| = \dfrac{y_2}{\sin\angle OAB}$，而$\angle OAB = \dfrac{\pi}{4}$，故$|AQ| = \sqrt{2}y_2$．由

$\dfrac{|AQ|}{|PQ|} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ$，可得$5y_1 = 9y_2$．

由方程组$\begin{cases} y = kx, \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$消去$x$，可得$y_1 = \dfrac{6k}{\sqrt{9k^2+4}}$．易知直线$AB$的方程为

$x + y - 2 = 0$，由方程组$\begin{cases} y = kx, \\ x + y - 2 = 0, \end{cases}$消去$x$，可得$y_2 = \dfrac{2k}{k+1}$．由$5y_1 = 9y_2$，可得

$5(k+1) = 3\sqrt{9k^2+4}$，两边平方，整理得$56k^2 - 50k + 11 = 0$，解得$k = \dfrac{1}{2}$，或$k = \dfrac{11}{28}$．

所以，k的值为$\dfrac{1}{2}$或$\dfrac{11}{28}$．

（20）本小题主要考查导数的运算、导数的几何意义、运用导数研究指数函数与对数函数的性质等基础知识和方法．考查函数与方程思想、化归思想．考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解：**由已知，$h(x) = a^x - x\ln a$，有$h'(x) = a^x\ln a - \ln a$．

令$h'(x) = 0$，解得$x = 0$．

由$a > 1$，可知当x变化时，$h'(x)$，$h(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	极小值	↗

所以函数$h(x)$的单调递减区间为$(-\infty, 0)$，单调递增区间为$(0, +\infty)$．

（Ⅱ）**证明：**由$f'(x) = a^x\ln a$，可得曲线$y = f(x)$在点$(x_1, f(x_1))$处的切线斜率为

$a^{x_1}\ln a$．由$g'(x) = \dfrac{1}{x\ln a}$，可得曲线$y = g(x)$在点$(x_2, g(x_2))$处的切线斜率为$\dfrac{1}{x_2\ln a}$．因

为这两条切线平行，故有 $a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a}$，即 $x_2a^{x_1}(\ln a)^2=1$．两边取以 a 为底的对数，得 $\log_a x_2+x_1+2\log_a \ln a=0$，所以 $x_1+g(x_2)=-\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$．

（III）**证明：** 曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_1,a^{x_1}) 处的切线 $l_1:y-a^{x_1}=a^{x_1}\ln a\cdot(x-x_1)$．曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_2,\log_a x_2)$ 处的切线 $l_2:y-\log_a x_2=\dfrac{1}{x_2\ln a}(x-x_2)$．

要证明当 $a\geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，存在直线 l，使 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，也是曲线 $y=g(x)$ 的切线，只需证明当 $a\geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，存在 $x_1\in(-\infty,+\infty)$，$x_2\in(0,+\infty)$，使得 l_1 与 l_2 重合．即只需证明当 $a\geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，方程组 $\begin{cases} a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a}, & ① \\ a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a=\log_a x_2-\dfrac{1}{\ln a} & ② \end{cases}$ 有解．

由①得 $x_2=\dfrac{1}{a^{x_1}(\ln a)^2}$，代入②，得

$$a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a+x_1+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}=0. \qquad ③$$

因此，只需证明当 $a\geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，关于 x_1 的方程③存在实数解．

设函数 $u(x)=a^x-xa^x\ln a+x+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$，即要证明当 $a\geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，函数 $y=u(x)$ 存在零点．

$u'(x)=1-(\ln a)^2xa^x$，可知 $x\in(-\infty,0)$ 时，$u'(x)>0$；$x\in(0,+\infty)$ 时，$u'(x)$ 单调递减，又 $u'(0)=1>0$，$u'\left(\dfrac{1}{(\ln a)^2}\right)=1-a^{\frac{1}{(\ln a)^2}}<0$，故存在唯一的 x_0，且 $x_0>0$，使得 $u'(x_0)=0$，即 $1-(\ln a)^2x_0a^{x_0}=0$．由此可得 $u(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减．$u(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值 $u(x_0)$．

因为 $a\geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$，故 $\ln\ln a\geqslant -1$，所以

$$u(x_0)=a^{x_0}-x_0a^{x_0}\ln a+x_0+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}=\frac{1}{x_0(\ln a)^2}+x_0+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}\geqslant\frac{2+2\ln\ln a}{\ln a}\geqslant 0.$$

下面证明存在实数t，使得$u(t)<0$.

由（Ⅰ）可得$a^x \geqslant 1+x\ln a$，当$x>\dfrac{1}{\ln a}$时，有

$$u(x) \leqslant (1+x\ln a)(1-x\ln a)+x+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}=-(\ln a)^2x^2+x+1+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a},$$

所以存在实数t，使得$u(t)<0$.

因此，当$a \geqslant e^{\frac{1}{e}}$时，存在$x_1 \in (-\infty,+\infty)$，使得$u(x_1)=0$.

所以，当$a \geqslant e^{\frac{1}{e}}$时，存在直线$l$，使$l$是曲线$y=f(x)$的切线，也是曲线$y=g(x)$的切线.