绝密★启用前

2018年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（文史类）参考解答

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分40分．

（1）C	（2）C	（3）A	（4）B
（5）D	（6）A	（7）A	（8）C

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分30分．

（9）$4-\mathrm{i}$	（10）e	（11）$\dfrac{1}{3}$
（12）$x^2+y^2-2x=0$	（13）$\dfrac{1}{4}$	（14）$\left[\dfrac{1}{8},2\right]$

三．解答题

（15）本小题主要考查随机抽样、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式等基本知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分13分．

（Ⅰ）**解：** 由已知，甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数之比为$3:2:2$，由于采用分层抽样的方法从中抽取7名同学，因此应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取3人，2人，2人．

（Ⅱ）（ⅰ）**解：** 从抽出的7名同学中随机抽取2名同学的所有可能结果为

$\{A,B\}$，$\{A,C\}$，$\{A,D\}$，$\{A,E\}$，$\{A,F\}$，$\{A,G\}$，$\{B,C\}$，$\{B,D\}$，$\{B,E\}$，$\{B,F\}$，$\{B,G\}$，$\{C,D\}$，$\{C,E\}$，$\{C,F\}$，$\{C,G\}$，$\{D,E\}$，$\{D,F\}$，$\{D,G\}$，$\{E,F\}$，$\{E,G\}$，$\{F,G\}$，共21种．

（ⅱ）**解：** 由（Ⅰ），不妨设抽出的7名同学中，来自甲年级的是A,B,C，来自乙年级的是D,E，来自丙年级的是F,G，则从抽出的7名同学中随机抽取的2名同学来自同一年级的所有可能结果为$\{A,B\}$，$\{A,C\}$，$\{B,C\}$，$\{D,E\}$，$\{F,G\}$，共5种．

所以，事件M发生的概率$P(M)=\dfrac{5}{21}$．

（16）本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角差的正弦与余弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识，考查运算求解能力．满分 13 分．

（Ⅰ）**解：** 在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得$b\sin A=a\sin B$，又由

$b\sin A=a\cos\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，得$a\sin B=a\cos\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，即$\sin B=\cos\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，可得

$\tan B=\sqrt{3}$．又因为$B\in(0,\pi)$，可得$B=\dfrac{\pi}{3}$．

（Ⅱ）**解：** 在$\triangle ABC$中，由余弦定理及$a=2$，$c=3$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，有

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，故$b=\sqrt{7}$．

由$b\sin A=a\cos\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，可得$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．因为$a<c$，故$\cos A=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$．因此

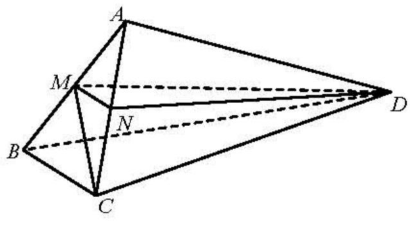
$\sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\dfrac{1}{7}$．所以，

$$\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

（17）本小题主要考查异面直线所成的角、直线与平面所成的角、平面与平面垂直等基础知识．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．满分 13 分．

（Ⅰ）**证明：** 由平面$ABC\perp$平面ABD，平面$ABC\cap$平面$ABD=AB$，$AD\perp AB$，可得$AD\perp$平面ABC，故$AD\perp BC$．

（Ⅱ）**解：** 取棱AC的中点N，连接MN，ND．又因为M为棱AB的中点，故$MN\parallel BC$．所以$\angle DMN$（或其补角）为异面直线BC与MD所成的角．



在$\mathrm{Rt}\triangle DAM$中，$AM=1$，故

$DM=\sqrt{AD^2+AM^2}=\sqrt{13}$．因为$AD\perp$平面$ABC$，

故$AD\perp AC$．在$\mathrm{Rt}\triangle DAN$中，$AN=1$，故$DN=\sqrt{AD^2+AN^2}=\sqrt{13}$．

在等腰三角形DMN中，$MN=1$，可得$\cos\angle DMN=\dfrac{\frac{1}{2}MN}{DM}=\dfrac{\sqrt{13}}{26}$．

所以，异面直线BC与MD所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{13}}{26}$．

（Ⅲ）**解**：连接CM．因为$\triangle ABC$为等边三角形，M为边AB的中点，故$CM\perp AB$，$CM=\sqrt{3}$．又因为平面$ABC\perp$平面ABD，而$CM\subset$平面ABC，故$CM\perp$平面ABD．所以，$\angle CDM$为直线CD与平面ABD所成的角．

在$\mathrm{Rt}\triangle CAD$中，$CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=4$．

在$\mathrm{Rt}\triangle CMD$中，$\sin\angle CDM=\dfrac{CM}{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

所以，直线CD与平面ABD所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

（18）本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前n项和公式等基础知识．考查数列求和的基本方法和运算求解能力．满分13分．

（Ⅰ）**解**：设等比数列$\{b_n\}$的公比为q．由$b_1=1$，$b_3=b_2+2$，可得$q^2-q-2=0$．因为$q>0$，可得$q=2$，故$b_n=2^{n-1}$．所以，$T_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$．

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d．由$b_4=a_3+a_5$，可得$a_1+3d=4$．由$b_5=a_4+2a_6$，可得$3a_1+13d=16$，从而$a_1=1$，$d=1$，故$a_n=n$．所以，$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$．

（Ⅱ）**解**：由（Ⅰ），有

$$T_1+T_2+\cdots+T_n=\left(2^1+2^2+\cdots+2^n\right)-n=\frac{2\times\left(1-2^n\right)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2.$$

由$S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$可得

$$\frac{n(n+1)}{2}+2^{n+1}-n-2=n+2^{n+1},$$

整理得$n^2-3n-4=0$，解得$n=-1$（舍），或$n=4$．

所以，n的值为4．

（19）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识．考查用代数方法研究圆锥曲线的性质．考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力．满分14分．

（Ⅰ）**解**：设椭圆的焦距为$2c$，由已知有$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{5}{9}$，又由$a^2=b^2+c^2$，可得$2a=3b$．由$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$，从而$a=3$，$b=2$．

所以，椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$．

（Ⅱ）**解：** 设点 P 的坐标为 (x_1, y_1)，点 M 的坐标为 (x_2, y_2)，由题意，$x_2 > x_1 > 0$，点 Q 的坐标为 $(-x_1, -y_1)$．由 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍，可得 $|PM| = 2|PQ|$，从而 $x_2 - x_1 = 2\left[x_1 - (-x_1)\right]$，即 $x_2 = 5x_1$．

易知直线 AB 的方程为 $2x+3y=6$，由方程组 $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ y=kx, \end{cases}$ 消去 y，可得 $x_2 = \dfrac{6}{3k+2}$．由方程组 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ y=kx, \end{cases}$ 消去 y，可得 $x_1 = \dfrac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$．由 $x_2 = 5x_1$，可得 $\sqrt{9k^2+4} = 5(3k+2)$，两边平方，整理得 $18k^2+25k+8=0$，解得 $k=-\dfrac{8}{9}$，或 $k=-\dfrac{1}{2}$．当 $k=-\dfrac{8}{9}$ 时，$x_2=-9<0$，不合题意，舍去；当 $k=-\dfrac{1}{2}$ 时，$x_2=12$，$x_1=\dfrac{12}{5}$，符合题意．

所以，k 的值为 $-\dfrac{1}{2}$．

（20）本小题主要考查导数的运算、导数的几何意义、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法．考查函数思想和分类讨论思想．考查综合分析问题和解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解：** 由已知，可得 $f(x)=x(x-1)(x+1)=x^3-x$，故 $f'(x)=3x^2-1$．因此 $f(0)=0$，$f'(0)=-1$，又因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$，故所求切线方程为 $x+y=0$．

（Ⅱ）**解：** 由已知可得

$$f(x)=(x-t_2+3)(x-t_2)(x-t_2-3)=(x-t_2)^3-9(x-t_2)=x^3-3t_2x^2+\left(3t_2^2-9\right)x-t_2^3+9t_2.$$

故 $f'(x)=3x^2-6t_2x+3t_2^2-9$．令 $f'(x)=0$，解得 $x=t_2-\sqrt{3}$，或 $x=t_2+\sqrt{3}$．

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty, t_2-\sqrt{3}\right)$	$t_2-\sqrt{3}$	$\left(t_2-\sqrt{3}, t_2+\sqrt{3}\right)$	$t_2+\sqrt{3}$	$\left(t_2+\sqrt{3}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(t_2-\sqrt{3}\right)=\left(-\sqrt{3}\right)^3-9\times\left(-\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}$；函数 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(t_2+\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^3-9\times\left(\sqrt{3}\right)=-6\sqrt{3}$.

（III）**解：**曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于关于 x 的方程 $(x-t_2+d)(x-t_2)(x-t_2-d)+(x-t_2)+6\sqrt{3}=0$ 有三个互异的实数解. 令 $u=x-t_2$，可得 $u^3+\left(1-d^2\right)u+6\sqrt{3}=0$.

设函数 $g(x)=x^3+\left(1-d^2\right)x+6\sqrt{3}$，则曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于函数 $y=g(x)$ 有三个零点.

$g'(x)=3x^2+\left(1-d^2\right)$.

当 $d^2\leqslant 1$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，这时 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，不合题意.

当 $d^2>1$ 时，令 $g'(x)=0$，解得 $x_1=-\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}$，$x_2=\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}$.

易得，$g(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递增，在 $[x_1, x_2]$ 上单调递减，在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增.

$g(x)$ 的极大值 $g(x_1)=g\left(-\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}\left(d^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{9}+6\sqrt{3}>0$.

$g(x)$ 的极小值 $g(x_2)=g\left(\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}\right)=-\dfrac{2\sqrt{3}\left(d^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{9}+6\sqrt{3}$.

若 $g(x_2)\geqslant 0$，由 $g(x)$ 的单调性可知函数 $y=g(x)$ 至多有两个零点，不合题意.

若 $g(x_2)<0$，即 $(d^2-1)^{\frac{3}{2}}>27$，也就是 $|d|>\sqrt{10}$，此时 $|d|>x_2$，$g(|d|)=|d|+6\sqrt{3}>0$，且 $-2|d|<x_1$，$g(-2|d|)=-6|d|^3-2|d|+6\sqrt{3}<-62\sqrt{10}+6\sqrt{3}<0$，从而由 $g(x)$ 的单调性，可知函数 $y=g(x)$ 在区间 $(-2|d|,x_1)$，(x_1,x_2)，$(x_2,|d|)$ 内各有一个零点，符合题意.

所以，d 的取值范围是 $(-\infty,-\sqrt{10})\cup(\sqrt{10},+\infty)$.