绝密★启用前

2017年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（文史类）参考解答

天津市教育招生考试院

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 40 分．

（1）B　（2）B　（3）C　（4）C

（5）D　（6）C　（7）A　（8）A

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 30 分．

（9）-2　（10）1　（11）$\dfrac{9}{2}\pi$

（12）$(x+1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=1$　（13）4　（14）$\dfrac{3}{11}$

三．解答题

（15）本小题主要考查同角三角函数的基本关系、二倍角的正弦、余弦公式、两角差的正弦公式以及正弦定理、余弦定理等基础知识．考查运算求解能力．满分 13 分．

（Ⅰ）解：由 $a\sin A=4b\sin B$，及 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $a=2b$．由 $ac=\sqrt{5}(a^2-b^2-c^2)$，及余弦定理，得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{5}}{5}ac}{ac}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

（Ⅱ）解：由（Ⅰ），可得 $\sin A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，代入 $a\sin A=4b\sin B$，得 $\sin B=\dfrac{a\sin A}{4b}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．由（Ⅰ）知，$A$ 为钝角，所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．于是 $\sin 2B=2\sin B\cos B=\dfrac{4}{5}$，$\cos 2B=1-2\sin^2 B=\dfrac{3}{5}$，故

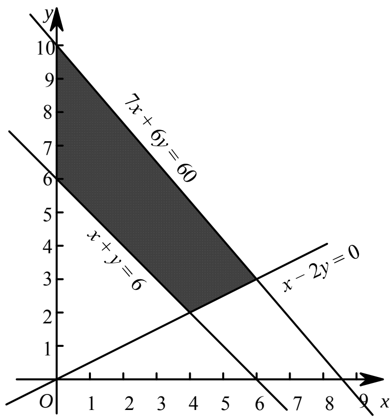
$$\sin\left(2B-A\right)=\sin 2B\cos A-\cos 2B\sin A=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

（16）本小题主要考查用二元线性规划的基础知识和基本方法解决简单实际问题的能力，以及抽象概括能力和运算求解能力．满分 13 分．

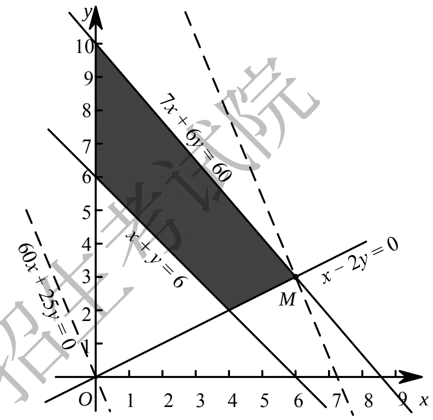
（Ⅰ）**解：**由已知，x，y 满足的数学关系式为

$$\begin{cases}70x+60y\leqslant 600,\\ 5x+5y\geqslant 30,\\ x\leqslant 2y,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}7x+6y\leqslant 60,\\ x+y\geqslant 6,\\ x-2y\leqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$$

该二元一次不等式组所表示的平面区域为图1中的阴影部分：



（图 1）



（图 2）

（Ⅱ）**解：**设总收视人次为 z 万，则目标函数为 $z=60x+25y$．

考虑 $z=60x+25y$，将它变形为 $y=-\dfrac{12}{5}x+\dfrac{z}{25}$，这是斜率为 $-\dfrac{12}{5}$，随 z 变化的一族平行直线．$\dfrac{z}{25}$ 为直线在 y 轴上的截距，当 $\dfrac{z}{25}$ 取得最大值时，z 的值最大．又因为 x，y 满足约束条件，所以由图 2 可知，当直线 $z=60x+25y$ 经过可行域上的点 M 时，截距 $\dfrac{z}{25}$ 最大，即 z 最大．

解方程组 $\begin{cases}7x+6y=60,\\ x-2y=0,\end{cases}$ 得点 M 的坐标为 $(6,3)$．

所以，电视台每周播出甲连续剧 6 次、乙连续剧 3 次时才能使总收视人次最多．

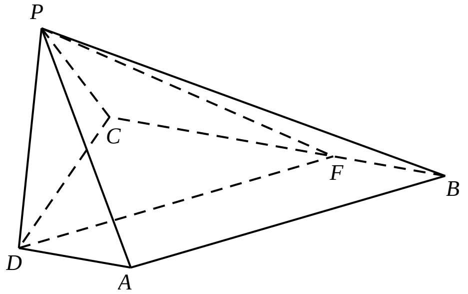
（17）本小题主要考查两条异面直线所成的角、直线与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．满分 13 分．

（Ⅰ）**解：**如图，由已知 $AD/\!/BC$，故 $\angle DAP$ 或其补角即为异面直线 AP 与 BC 所成的角．因为 $AD\perp$ 平面 PDC，所以 $AD\perp PD$．在 $\mathrm{Rt}\triangle PDA$ 中，由已知，得

天津市教育招生考试院

$AP=\sqrt{AD^2+PD^2}=\sqrt{5}$，故 $\cos\angle DAP=\dfrac{AD}{AP}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

所以，异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．



（Ⅱ）**证明：**因为 $AD\perp$ 平面 PDC，直线 $PD\subset$ 平面 PDC，所以 $AD\perp PD$．又因为 $BC /\!/ AD$，所以 $PD\perp BC$，又 $PD\perp PB$，所以 $PD\perp$ 平面 PBC．

（Ⅲ）**解：**过点 D 作 AB 的平行线交 BC 于点 F，连结 PF，则 DF 与平面 PBC 所成的角等于 AB 与平面 PBC 所成的角．

因为 $PD\perp$ 平面 PBC，故 PF 为 DF 在平面 PBC 上的射影，所以 $\angle DFP$ 为直线 DF 和平面 PBC 所成的角．

由于 $AD /\!/ BC$，$DF /\!/ AB$，故 $BF=AD=1$，由已知，得 $CF=BC-BF=2$．又 $AD\perp DC$，故 $BC\perp DC$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DCF$ 中，可得 $DF=\sqrt{CD^2+CF^2}=2\sqrt{5}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DPF$ 中，可得 $\sin\angle DFP=\dfrac{PD}{DF}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

所以，直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

（18）本小题主要考查等差数列、等比数列及其前 n 项和公式等基础知识．考查数列求和的基本方法和运算求解能力．满分 13 分．

（Ⅰ）**解：**设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q．由已知 $b_2+b_3=12$，得 $b_1\left(q+q^2\right)=12$，而 $b_1=2$，所以 $q^2+q-6=0$．又因为 $q>0$，解得 $q=2$．所以，$b_n=2^n$．

由 $b_3=a_4-2a_1$，可得 $3d-a_1=8$①．由 $S_{11}=11b_4$，可得 $a_1+5d=16$②，联立①②，解得 $a_1=1$，$d=3$，由此可得 $a_n=3n-2$．

所以，$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-2$，$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^n$．

（Ⅱ）　**解：**设数列 $\{a_{2n}b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，由 $a_{2n}=6n-2$，有

$$T_n=4\times 2+10\times 2^2+16\times 2^3+\cdots+\left(6n-2\right)\times 2^n,$$

$$2T_n=4\times 2^2+10\times 2^3+16\times 2^4+\cdots+\left(6n-8\right)\times 2^n+\left(6n-2\right)\times 2^{n+1},$$

天津市教育招生考试院

上述两式相减，得

$$\begin{aligned}-T_n &= 4\times 2+6\times 2^2+6\times 2^3+\cdots+6\times 2^n-(6n-2)\times 2^{n+1}\\ &=\frac{12\times(1-2^n)}{1-2}-4-(6n-2)\times 2^{n+1}\\ &=-(3n-4)2^{n+2}-16.\end{aligned}$$

得 $T_n=(3n-4)2^{n+2}+16$.

所以，数列 $\{a_{2n}b_n\}$ 的前 n 项和为 $(3n-4)2^{n+2}+16$.

（19）本小题主要考查导数的运算、导数的几何意义、利用导数研究函数的性质等基础知识和方法．考查用函数思想解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解：**由 $f(x)=x^3-6x^2-3a(a-4)x+b$，可得

$$f'(x)=3x^2-12x-3a(a-4)=3(x-a)(x-(4-a)).$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=a$，或 $x=4-a$．由 $|a|\leqslant 1$，得 $a<4-a$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,a)$	$(a,4-a)$	$(4-a,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

所以，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,a)$，$(4-a,+\infty)$，单调递减区间为 $(a,4-a)$.

（Ⅱ）（ⅰ）**证明：**因为 $g'(x)=\mathrm{e}^x\left(f(x)+f'(x)\right)$，由题意知 $\begin{cases}g(x_0)=\mathrm{e}^{x_0},\\ g'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0},\end{cases}$ 所以

$\begin{cases}f(x_0)\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0},\\ \mathrm{e}^{x_0}\left(f(x_0)+f'(x_0)\right)=\mathrm{e}^{x_0},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}f(x_0)=1,\\ f'(x_0)=0.\end{cases}$

所以，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数等于 0.

天津市教育招生考试院

（ii）**解**：因为 $g(x)\leqslant e^x$，$x\in[x_0-1,x_0+1]$，由 $e^x>0$，可得 $f(x)\leqslant 1$．又因为 $f(x_0)=1$，$f'(x_0)=0$，故 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点，由（Ⅰ）知 $x_0=a$．另一方面，由于 $|a|\leqslant 1$，故 $a+1<4-a$，由（Ⅰ）知 $f(x)$ 在 $(a-1,a)$ 内单调递增，在 $(a,a+1)$ 内单调递减，故当 $x_0=a$ 时，$f(x)\leqslant f(a)=1$ 在 $[a-1,a+1]$ 上恒成立，从而 $g(x)\leqslant e^x$ 在 $[x_0-1,x_0+1]$ 上恒成立．

由 $f(a)=a^3-6a^2-3a(a-4)a+b=1$，得 $b=2a^3-6a^2+1$，$-1\leqslant a\leqslant 1$．令 $t(x)=2x^3-6x^2+1$，$x\in[-1,1]$，所以 $t'(x)=6x^2-12x$，令 $t'(x)=0$，解得 $x=2$（舍去），或 $x=0$．因为 $t(-1)=-7$，$t(1)=-3$，$t(0)=1$，因此，$t(x)$ 的值域为 $[-7,1]$．

所以，b 的取值范围是 $[-7,1]$．

（20）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识．考查用代数方法研究圆锥曲线的性质和方程思想．考查运算求解能力，以及综合分析问题和解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解**：设椭圆的离心率为 e．由已知，可得 $\frac{1}{2}(c+a)c=\frac{b^2}{2}$．又由 $b^2=a^2-c^2$，可得 $2c^2+ac-a^2=0$，即 $2e^2+e-1=0$．又因为 $0<e<1$，解得 $e=\frac{1}{2}$．

所以，椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$．

（Ⅱ）（i）**解**：依题意，设直线 FP 的方程为 $x=my-c$（$m>0$），则直线 FP 的斜率为 $\frac{1}{m}$．由（Ⅰ）知 $a=2c$，可得直线 AE 的方程为 $\frac{x}{2c}+\frac{y}{c}=1$，即 $x+2y-2c=0$，与直线 FP 的方程联立，可解得 $x=\frac{(2m-2)c}{m+2}$，$y=\frac{3c}{m+2}$，即点 Q 的坐标为 $\left(\frac{(2m-2)c}{m+2},\frac{3c}{m+2}\right)$．由已知 $|FQ|=\frac{3}{2}c$，有 $\left(\frac{(2m-2)c}{m+2}+c\right)^2+\left(\frac{3c}{m+2}\right)^2=\left(\frac{3c}{2}\right)^2$，整理得 $3m^2-4m=0$，所以 $m=\frac{4}{3}$，即直线 FP 的斜率为 $\frac{3}{4}$．

天津市教育招生考试院

（ⅱ）**解：** 由 $a=2c$，可得 $b=\sqrt{3}c$，故椭圆方程可以表示为 $\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$.

由（ⅰ）得直线 FP 的方程为 $3x-4y+3c=0$，与椭圆方程联立 $\begin{cases}3x-4y+3c=0,\\ \dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1,\end{cases}$ 消去 y，整理得 $7x^2+6cx-13c^2=0$，解得 $x=-\dfrac{13c}{7}$（舍去），或 $x=c$. 因此可得点 $P\left(c,\dfrac{3c}{2}\right)$，进而可得 $|FP|=\sqrt{(c+c)^2+\left(\dfrac{3c}{2}\right)^2}=\dfrac{5c}{2}$，所以 $|PQ|=|FP|-|FQ|=\dfrac{5c}{2}-\dfrac{3c}{2}=c$. 由已知，线段 PQ 的长即为 PM 与 QN 这两条平行直线间的距离，故直线 PM 和 QN 都垂直于直线 FP .

因为 $QN\perp FP$，所以 $|QN|=|FQ|\cdot\tan\angle QFN=\dfrac{3c}{2}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9c}{8}$，所以 $\triangle FQN$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}|FQ||QN|=\dfrac{27c^2}{32}$，同理 $\triangle FPM$ 的面积等于 $\dfrac{75c^2}{32}$，由四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$，得 $\dfrac{75c^2}{32}-\dfrac{27c^2}{32}=3c$，整理得 $c^2=2c$，又由 $c>0$，得 $c=2$.

所以，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

天津市教育招生考试院