绝密★启用前

2017年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　　学（理工类）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利!

第Ⅰ卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

- 如果事件 A，B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
- 如果事件 A，B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$.
- 棱柱的体积公式 $V=Sh$. 其中 S 表示棱柱的底面面积，h 表示棱柱的高.
- 球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. 其中 R 表示球的半径.

一．选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

（1）设集合 $A=\{1,2,6\}$，$B=\{2,4\}$，$C=\{x\in\mathbf{R}\,|\,-1\leqslant x\leqslant 5\}$，则 $(A\cup B)\cap C=$

（A）$\{2\}$　　（B）$\{1,2,4\}$

（C）$\{1,2,4,6\}$　　（D）$\{x\in\mathbf{R}\,|\,-1\leqslant x\leqslant 5\}$

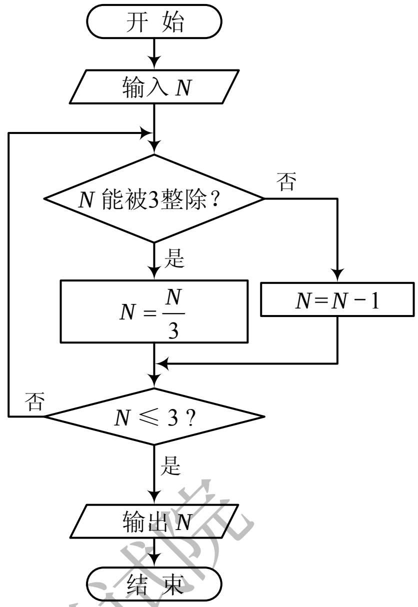
（2）设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y\geqslant 0,\\ x+2y-2\geqslant 0,\\ x\leqslant 0,\\ y\leqslant 3,\end{cases}$ 则目标函数 $z=x+y$ 的最大值为

（A）$\frac{2}{3}$　　（B）1　　（C）$\frac{3}{2}$　　（D）3

（3）阅读右面的程序框图，运行相应的程序，若输入 N 的值为 24，则输出 N 的值为

（A）0　　（B）1

（C）2　　（D）3



（第 3 题图）

（4）设 $\theta\in\mathbf{R}$，则“$\left|\theta-\dfrac{\pi}{12}\right|<\dfrac{\pi}{12}$”是“$\sin\theta<\dfrac{1}{2}$”的

（A）充分而不必要条件

（B）必要而不充分条件

（C）充要条件

（D）既不充分也不必要条件

（5）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左焦点为 F，离心率为 $\sqrt{2}$．若经过 F 和 $P(0,4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线，则双曲线的方程为

（A）$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$　　（C）$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$

（6）已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，$g(x)=xf(x)$．若 $a=g(-\log_2 5.1)$，$b=g(2^{0.8})$，$c=g(3)$，则 a，b，c 的大小关系为

（A）$a<b<c$　　（B）$c<b<a$　　（C）$b<a<c$　　（D）$b<c<a$

（7）设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$，其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\pi$．若 $f(\dfrac{5\pi}{8})=2$，$f(\dfrac{11\pi}{8})=0$，且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π，则

（A）$\omega=\dfrac{2}{3}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{12}$　　（B）$\omega=\dfrac{2}{3}$，$\varphi=-\dfrac{11\pi}{12}$

（C）$\omega=\dfrac{1}{3}$，$\varphi=-\dfrac{11\pi}{24}$　　（D）$\omega=\dfrac{1}{3}$，$\varphi=\dfrac{7\pi}{24}$

（8）已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-x+3, & x\leqslant 1,\\ x+\dfrac{2}{x}, & x>1.\end{cases}$ 设 $a\in\mathbf{R}$，若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant\left|\dfrac{x}{2}+a\right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围是

（A）$[-\dfrac{47}{16},2]$　　（B）$[-\dfrac{47}{16},\dfrac{39}{16}]$　　（C）$[-2\sqrt{3},2]$　　（D）$[-2\sqrt{3},\dfrac{39}{16}]$

绝密★启用前

2017 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　　学（理工类）

第Ⅱ卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2．本卷共 12 小题，共 110 分。

二．填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（9）已知 $a\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位，若 $\dfrac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 为实数，则 a 的值为____________.

（10）已知一个正方体的所有顶点在一个球面上，若这个正方体的表面积为 18，则这个球的体积为____________.

（11）在极坐标系中，直线 $4\rho\cos(\theta-\dfrac{\pi}{6})+1=0$ 与圆 $\rho=2\sin\theta$ 的公共点的个数为____________.

（12）若 a，$b\in\mathbf{R}$，$ab>0$，则 $\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为____________.

（13）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$AB=3$，$AC=2$．若 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$（$\lambda\in\mathbf{R}$），且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$，则 λ 的值为____________.

（14）用数字 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 组成没有重复数字，且至多有一个数字是偶数的四位数，这样的四位数一共有____________个.（用数字作答）

三．解答题：本大题共 **6** 小题，共 **80** 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（15）（**本小题满分 13 分**）

在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c．已知$a>b$，$a=5$，$c=6$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$．

（Ⅰ）求b和$\sin A$的值；

（Ⅱ）求$\sin(2A+\dfrac{\pi}{4})$的值．

（16）（**本小题满分 13 分**）

从甲地到乙地要经过3个十字路口，设各路口信号灯工作相互独立，且在各路口遇到红灯的概率分别为$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$．

（Ⅰ）记X表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数，求随机变量X的分布列和数学期望；

（Ⅱ）若有2辆车独立地从甲地到乙地，求这2辆车共遇到1个红灯的概率．

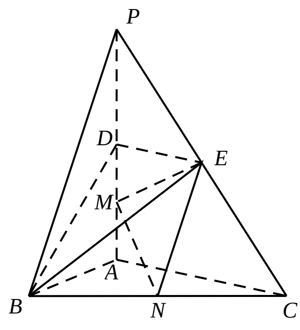
（17）（**本小题满分 13 分**）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$底面ABC，$\angle BAC=90^\circ$．点D，E，N分别为棱PA，PC，BC的中点，M是线段AD的中点，$PA=AC=4$，$AB=2$．

（Ⅰ）求证：$MN\,/\!/$平面BDE；

（Ⅱ）求二面角$C-EM-N$的正弦值；

（Ⅲ）已知点H在棱PA上，且直线NH与直线BE所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{21}$，求线段AH的长．



（18）（**本小题满分 13 分**）

已知$\{a_n\}$为等差数列，前n项和为S_n（$n\in\mathbf{N}^*$），$\{b_n\}$是首项为2的等比数列，且公比大于0，$b_2+b_3=12$，$b_3=a_4-2a_1$，$S_{11}=11b_4$．

（Ⅰ）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前n项和（$n\in\mathbf{N}^*$）.

（19）（**本小题满分 14 分**）

设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左焦点为$F$，右顶点为$A$，离心率为$\dfrac{1}{2}$．已知$A$是抛物线$y^2=2px$（$p>0$）的焦点，$F$到抛物线的准线$l$的距离为$\dfrac{1}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆的方程和抛物线的方程；

（Ⅱ）设l上两点P，Q关于x轴对称，直线AP与椭圆相交于点B（B异于点A），直线BQ与x轴相交于点D．若$\triangle APD$的面积为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，求直线AP的方程.

（20）（**本小题满分 14 分**）

设$a\in\mathbf{Z}$，已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$在区间$(1,2)$内有一个零点x_0，$g(x)$为$f(x)$的导函数.

（Ⅰ）求$g(x)$的单调区间；

（Ⅱ）设$m\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，函数$h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$，求证：$h(m)h(x_0)<0$；

（Ⅲ）求证：存在大于0的常数A，使得对于任意的正整数p，q，且$\dfrac{p}{q}\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，满足$\left|\dfrac{p}{q}-x_0\right|\geqslant\dfrac{1}{Aq^4}$.