绝密★启用前

2017 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）参考解答

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 40 分．

（1）B	（2）D	（3）C	（4）A
（5）B	（6）C	（7）A	（8）A

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 30 分．

（9）-2	（10）$\dfrac{9}{2}\pi$	（11）2
（12）4	（13）$\dfrac{3}{11}$	（14）1080

三．解答题

（15）本小题主要考查同角三角函数的基本关系、二倍角的正弦、余弦公式、两角和的正弦公式以及正弦定理、余弦定理等基础知识．考查运算求解能力．满分 13 分．

（Ⅰ）**解**：在$\triangle ABC$中，因为$a>b$，故由$\sin B=\dfrac{3}{5}$，可得$\cos B=\dfrac{4}{5}$．由已知及余弦定理，有$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=13$，所以$b=\sqrt{13}$．

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得$\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$．

所以，b的值为$\sqrt{13}$，$\sin A$的值为$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$．

（Ⅱ）**解**：由（Ⅰ）及$a<c$，得$\cos A=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$，所以$\sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{12}{13}$，$\cos 2A=1-2\sin^2 A=-\dfrac{5}{13}$．故

$$\sin\left(2A+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2A\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{7\sqrt{2}}{26}.$$

（16）本小题主要考查离散型随机变量的分布列与数学期望，事件的相互独立性，互斥事件的概率加法公式等基础知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分 13 分．

（Ⅰ）**解：**随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3．

$$P(X=0)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4},$$

$$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{11}{24},$$

$$P(X=2)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4},$$

$$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}.$$

所以，随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

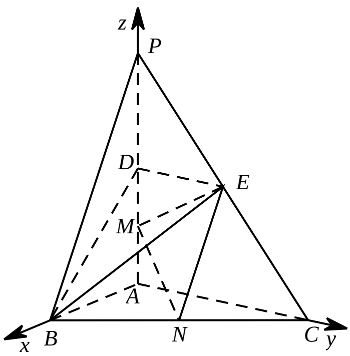
随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{11}{24}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{24}=\frac{13}{12}$．

（Ⅱ）**解：**设 Y 表示第一辆车遇到红灯的个数，Z 表示第二辆车遇到红灯的个数，则所求事件的概率为

$$\begin{aligned}P(Y+Z=1)&=P(Y=0,Z=1)+P(Y=1,Z=0)\\&=P(Y=0)P(Z=1)+P(Y=1)P(Z=0)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{11}{24}+\frac{11}{24}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{11}{48}.\end{aligned}$$

所以，这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率为 $\frac{11}{48}$．

（17）本小题主要考查直线与平面平行、二面角、异面直线所成的角等基础知识．考查用空间向量解决立体几何问题的方法．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．满分 13 分．



如图，以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}$ 方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系．依题意

可得 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,4,0)$，$P(0,0,4)$，$D(0,0,2)$，$E(0,2,2)$，$M(0,0,1)$，$N(1,2,0)$.

（Ⅰ）**证明**：$\overrightarrow{DE}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DB}=(2,0,-2)$. 设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ 2x-2z=0.\end{cases}$ 不妨设 $z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$. 又 $\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，可得 $\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=0$. 因为 $MN\not\subset$ 平面 BDE，所以 $MN/\!/$ 平面 BDE.

（Ⅱ）**解**：易知 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$ 为平面 CEM 的一个法向量. 设 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$ 为平面 EMN 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EM}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{MN}=0.\end{cases}$ 因为 $\overrightarrow{EM}=(0,-2,-1)$，$\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，所以 $\begin{cases}-2y-z=0,\\ x+2y-z=0.\end{cases}$

不妨设 $y=1$，可得 $\boldsymbol{n}_2=(-4,1,-2)$.

因此有 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=-\dfrac{4}{\sqrt{21}}$，于是 $\sin\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\sqrt{105}}{21}$.

所以，二面角 $C-EM-N$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{105}}{21}$.

（Ⅲ）**解**：依题意，设 $AH=h$（$0\leqslant h\leqslant 4$），则 $H(0,0,h)$，进而可得 $\overrightarrow{NH}=(-1,-2,h)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,2,2)$. 由已知，得 $\left|\cos\langle\overrightarrow{NH},\overrightarrow{BE}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{BE}\right|}{\left|\overrightarrow{NH}\right|\left|\overrightarrow{BE}\right|}=\dfrac{|2h-2|}{\sqrt{h^2+5}\times 2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{21}$，整理得 $10h^2-21h+8=0$，解得 $h=\dfrac{8}{5}$，或 $h=\dfrac{1}{2}$.

所以，线段 AH 的长为 $\dfrac{8}{5}$ 或 $\dfrac{1}{2}$.

（18）本小题主要考查等差数列、等比数列及其前 n 项和公式等基础知识．考查数列求和的基本方法和运算求解能力．满分 13 分．

（Ⅰ）**解**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q. 由已知 $b_2+b_3=12$，得 $b_1(q+q^2)=12$，而 $b_1=2$，所以 $q^2+q-6=0$. 又因为 $q>0$，解得 $q=2$. 所以，$b_n=2^n$.

由 $b_3 = a_4 - 2a_1$，可得 $3d - a_1 = 8$①．由 $S_{11} = 11b_4$，可得 $a_1 + 5d = 16$②，联立①②，解得 $a_1 = 1$，$d = 3$，由此可得 $a_n = 3n - 2$．

所以，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n - 2$，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^n$．

（Ⅱ） **解**：设数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和为 T_n，由 $a_{2n} = 6n - 2$，$b_{2n-1} = 2\times 4^{n-1}$，有 $a_{2n}b_{2n-1} = (3n-1)\times 4^n$，故

$$T_n = 2\times 4 + 5\times 4^2 + 8\times 4^3 + \cdots + (3n-1)\times 4^n,$$

$$4T_n = 2\times 4^2 + 5\times 4^3 + 8\times 4^4 + \cdots + (3n-4)\times 4^n + (3n-1)\times 4^{n+1},$$

上述两式相减，得

$$\begin{aligned}-3T_n &= 2\times 4 + 3\times 4^2 + 3\times 4^3 + \cdots + 3\times 4^n - (3n-1)\times 4^{n+1}\\ &= \frac{12\times(1-4^n)}{1-4} - 4 - (3n-1)\times 4^{n+1}\\ &= -(3n-2)\times 4^{n+1} - 8.\end{aligned}$$

得 $T_n = \dfrac{3n-2}{3}\times 4^{n+1} + \dfrac{8}{3}$．

所以，数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和为 $\dfrac{3n-2}{3}\times 4^{n+1} + \dfrac{8}{3}$．

（19）本小题主要考查椭圆、抛物线的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识．考查用代数方法研究圆锥曲线的性质．考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解**：设 F 的坐标为 $(-c, 0)$．依题意，$\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{p}{2} = a$，$a - c = \dfrac{1}{2}$，解得 $a = 1$，$c = \dfrac{1}{2}$，$p = 2$，于是 $b^2 = a^2 - c^2 = \dfrac{3}{4}$．

所以，椭圆的方程为 $x^2 + \dfrac{4y^2}{3} = 1$，抛物线的方程为 $y^2 = 4x$．

（Ⅱ）**解**：设直线 AP 的方程为 $x = my + 1$（$m \neq 0$），与直线 l 的方程 $x = -1$ 联立，可得点 $P\left(-1, -\dfrac{2}{m}\right)$，故 $Q\left(-1, \dfrac{2}{m}\right)$．将 $x = my + 1$ 与 $x^2 + \dfrac{4y^2}{3} = 1$ 联立，消去 x，整理得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6my = 0$，解得 $y = 0$，或 $y = \dfrac{-6m}{3m^2 + 4}$．由点 B 异于点 A，可得点

$B\left(\frac{-3m^2+4}{3m^2+4},\frac{-6m}{3m^2+4}\right)$．由 $Q\left(-1,\frac{2}{m}\right)$，可得直线 BQ 的方程为 $\left(\frac{-6m}{3m^2+4}-\frac{2}{m}\right)(x+1)-\left(\frac{-3m^2+4}{3m^2+4}+1\right)\left(y-\frac{2}{m}\right)=0$，令 $y=0$，解得 $x=\frac{2-3m^2}{3m^2+2}$，故 $D\left(\frac{2-3m^2}{3m^2+2},0\right)$．所以 $|AD|=1-\frac{2-3m^2}{3m^2+2}=\frac{6m^2}{3m^2+2}$．又因为 $\triangle APD$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 $\frac{1}{2}\times\frac{6m^2}{3m^2+2}\times\frac{2}{|m|}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，整理得 $3m^2-2\sqrt{6}|m|+2=0$，解得 $|m|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $m=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$．

所以，直线 AP 的方程为 $3x+\sqrt{6}y-3=0$，或 $3x-\sqrt{6}y-3=0$．

（20）本小题主要考查导数的运算、利用导数研究函数的性质、证明不等式等基础知识和方法．考查函数思想和化归思想．考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解**：由 $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$，可得 $g(x)=f'(x)=8x^3+9x^2-6x-6$，进而可得 $g'(x)=24x^2+18x-6$．令 $g'(x)=0$，解得 $x=-1$，或 $x=\frac{1}{4}$．

当 x 变化时，$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$
$g'(x)$	+	−	+
$g(x)$	↗	↘	↗

所以，$g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$，$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$，单调递减区间是 $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$．

（Ⅱ）**证明**：由 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$，得 $h(m)=g(m)(m-x_0)-f(m)$，$h(x_0)=g(x_0)(m-x_0)-f(m)$．

令函数 $H_1(x)=g(x)(x-x_0)-f(x)$，则 $H_1'(x)=g'(x)(x-x_0)$．由（Ⅰ）知，当 $x\in[1,2]$ 时，$g'(x)>0$，故当 $x\in[1,x_0)$ 时，$H_1'(x)<0$，$H_1(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,2]$ 时，$H_1'(x)>0$，$H_1(x)$ 单调递增．因此，当 $x\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$ 时，$H_1(x)>H_1(x_0)=-f(x_0)=0$，可得 $H_1(m)>0$，即 $h(m)>0$．

令函数 $H_2(x)=g(x_0)(x-x_0)-f(x)$，则 $H_2'(x)=g(x_0)-g(x)$．由（Ⅰ）知 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，故当 $x\in[1,x_0)$ 时，$H_2'(x)>0$，$H_2(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_0,2]$ 时，$H_2'(x)<0$，$H_2(x)$ 单调递减．因此，当 $x\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$ 时，$H_2(x)<H_2(x_0)=0$，可得 $H_2(m)<0$，即 $h(x_0)<0$．

所以，$h(m)h(x_0)<0$．

（Ⅲ）**证明：**对于任意的正整数 p，q，且 $\dfrac{p}{q}\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，令 $m=\dfrac{p}{q}$，函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$．由（Ⅱ）知，当 $m\in[1,x_0)$ 时，$h(x)$ 在区间 (m,x_0) 内有零点；当 $m\in(x_0,2]$ 时，$h(x)$ 在区间 (x_0,m) 内有零点．所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个零点，不妨设为 x_1，则 $h(x_1)=g(x_1)\left(\dfrac{p}{q}-x_0\right)-f\left(\dfrac{p}{q}\right)=0$．

由（Ⅰ）知 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，故 $0<g(1)<g(x_1)<g(2)$，于是

$$\left|\frac{p}{q}-x_0\right|=\left|\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{g(x_1)}\right|\geqslant\frac{\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{g(2)}=\frac{\left|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4\right|}{g(2)q^4}.$$

因为当 $x\in[1,2]$ 时，$g(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上除 x_0 外没有其他的零点，而 $\dfrac{p}{q}\neq x_0$，故 $f\left(\dfrac{p}{q}\right)\neq 0$．又因为 p，q，a 均为整数，所以 $\left|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4\right|$ 是正整数，从而 $\left|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4\right|\geqslant 1$．所以 $\left|\dfrac{p}{q}-x_0\right|\geqslant\dfrac{1}{g(2)q^4}$．所以，只要取 $A=g(2)$，就有 $\left|\dfrac{p}{q}-x_0\right|\geqslant\dfrac{1}{Aq^4}$．